

مدرسة مصر الخير الإعدادية بجهينة - سوهاج
اسم الطالب
....
٢٠٢١
ملزمة
هندسة
وحساب مثلثات
الترم
الأول
الصف
الثالث
الإعدادي
تصميم
محمود عوض
معلم رياضيات
إعداد
و
تصميم
محمود عوض حسن
معلم
أول
رياضيات

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

القياس الستينى للزاوية الحادة

- وحدات القياس الستينى للزاوية هي : الدرجة ° ، الدقيقة ′ ، الثانية ″
- الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية أي أن ١° = ٦٠′ ، ١′ = ٦٠″
- في الآلة الحاسبة يستخدم مفتاح [°′″] لكتابة الدرجات والدقائق والثوانى

مثال ١ اكتب الزاوية ٤٢″ ٢٤′ ٣٥° بالدرجات:

الحل: نحول باستخدام الآلة الحاسبة كالتالى:

ابدأ ← [٣٥] [°′″] [٢٤] [°′″] [٤٢] [°′″] [=] [°′″]

فيكون الناتج هو ٣٥,٤١١٦٦٦٧°

مثال ٢ اكتب الزاوية ٥٤,٣٦° بالقياس الستينى:

الحل: نحول باستخدام الآلة الحاسبة كالتالى:

ابدأ ← [٥٤,٣٦] [=] [°′″]

فيكون الناتج هو ٣٦ ٢١ ٥٤°

تذكر

- مجموع قياسى الزاويتين المتتامتين = ٩٠°
- مجموع قياسى الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠°
- مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

تصميم محمود عوض — معلم رياضيات

مثال ١ إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستينى

الحل

قياس الزاوية الأولى = ٣ م ، قياس الزاوية الثانية = ٥ م

∵ مجموع قياسى الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠

∴ ٣م + ٥م = ١٨٠ ٨م = ١٨٠ م = ٢٢,٥

قياس الزاوية الأولى = ٣م = ٣× ٢٢,٥

= ٦٧,٥° [°′″] = ٣٠′ ٦٧°

قياس الزاوية الثانية = ٥م = ٥ ×٢٢,٥

= ١١٢,٥° [°′″] = ٣٠′ ١١٢°

مثال ٢ إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة للمثلث ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياس الستينى لكل منها

الحل

قياس الزاوية الأولى = ٣ م ،
قياس الزاوية الثانية = ٤ م
قياس الزاوية الثالثة = ٧ م

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠

∴ ٣م + ٤م + ٧م = ١٨٠

١٤م = ١٨٠ ∴ م = ١٢,٩

الأولى = ٣× ١٢,٩ = ٣٨,٧ [°′″] =

الثانية = ٤× ١٢,٩ = ٥١,٦ [°′″] =

الثالثة = ٧ × ١٢,٩ = ٩٠,٣ [°′″] =

ظا　جتا　جا



النسب المثلثية الأساسية

إذا كان Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

يمكن حساب النسب المثلثية لأى من الزاويتين الحادتين أ ، جـ

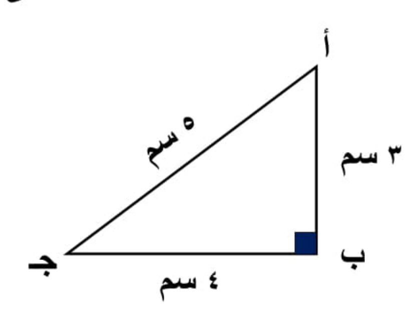
ولنأخذ الزاوية جـ كمثال :



جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$	(جيب الزاوية sin)
جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$	(جيب تمام الزاوية cos)
ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$	(ظل الزاوية tan)



◆ **مثال: من الشكل المقابل:**



جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٣}{٥}$ ، جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$

ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤}$ **لاحظ أن:** ظا^{٢} جـ = $(\frac{٣}{٤})^{٢} = \frac{٩}{١٦}$ وهكذا

جا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$ ، جتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٣}{٥}$

ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٤}{٣}$ **لاحظ أن:** جتا^{٢} أ = $(\frac{٣}{٥})^{٢} = \frac{٩}{٢٥}$ وهكذا

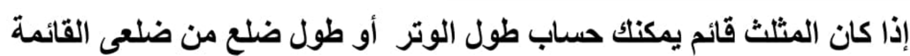
ملحوظة هامة

إذا طلب منك قياس زاوية لا بد أن تحسب جا أو جتا أو ظا للزاوية المطلوب قياسها ثم تستخدم مفتاح **shift**

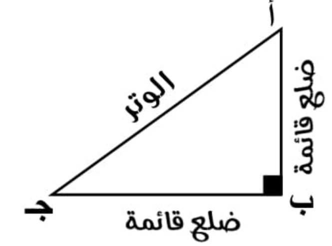
فمثلا: إذا كان جتا ب = $\frac{١}{٢}$ فإن الزاوية تحسب كتالى: $\frac{١}{٢}$ ← **sin** ← **shift** فيكون ق($\hat{ب}$) = ٦٠°

إذا كان جا ص = $\frac{٣}{٥}$ فإن الزاوية تحسب كتالى: $\frac{٣}{٥}$ ← **cos** ← **shift** فيكون ق($\hat{ص}$) = ٣٦,٥°

تذكير بنظرية فيثاغورث



إذا كان المثلث قائم يمكنك حساب طول الوتر أو طول ضلع من ضلعى القائمة



◆ **لحساب طول الوتر :** ربع ← اجمع ← اجذر

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} ومنها أ جـ = $\sqrt{\text{الناتج}}$

◆ **لحساب طول ضلع القائمة :** ربع ← اطرح ← اجذر

(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} ـ (أ ب)^{٢} ومنها ب جـ = $\sqrt{\text{الناتج}}$

(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} ـ (ب جـ)^{٢} ومنها أ ب = $\sqrt{\text{الناتج}}$

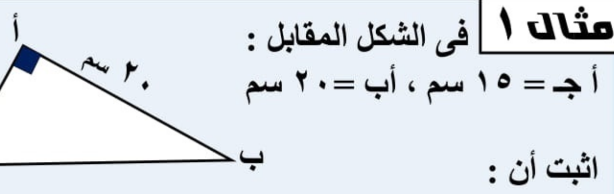
مثال ١

فى الشكل المقابل :

أ جـ = ١٥ سم ، أب = ٢٠ سم

اثبت أن :

جتا جـ جتا ب – جا جـ جا ب = صفر



الحل

(ب جـ)^{٢} = ٢٠^{٢} + ١٥^{٢} = ٦٢٥

ب جـ = ٢٥ سم

الأيمن = جتا جـ جتا ب – جا جـ جا ب

$= \frac{١٥}{٢٥} \times \frac{٢٠}{٢٥} - \frac{٢٠}{٢٥} \times \frac{١٥}{٢٥}$

$= \frac{٣٠٠}{٦٢٥} - \frac{٣٠٠}{٦٢٥} =$ صفر

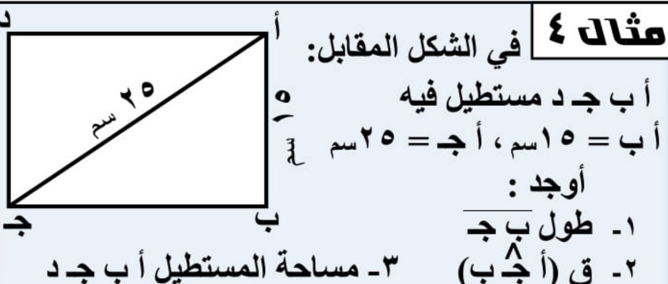
مثال ٢

س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص

فيه س ص = ٥سم ، س ع = ١٣ سم أوجد:

١) ظا س + ظا ع ٢) جتا س جتا ع – جا س جا ع

الحل



(ص ع)^{٢} = ١٦٩ - ٢٥ = ١٤٤

ص ع = ١٢ سم

١) ظا س + ظا ع = $\frac{١٢}{٥} + \frac{٥}{١٢} = \frac{١٦٩}{٦٠}$

٢) جتا س جتا ع – جا س جا ع =

$\frac{٥}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{٦٠}{١٦٩} - \frac{٦٠}{١٦٩} =$ صفر

مثال ٣

أ ب جـ ∆ متساوى الساقين فيه

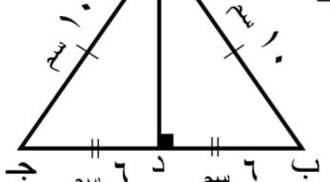
أ ب = أ جـ = ١٠ سم ،

، ب جـ = ١٢ سم

أوجد : ١) جا ب

٢) ق ($\hat{ب}$) ٣) مساحة سطح ∆ أ ب جـ

الحل



العمل : نرسم $\overline{أد}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∴ $\overline{أد}$ ينصف $\overline{ب جـ}$

∴ ب د = ٦سم

في ∆ أ د ب من فيثاغورث :

(أ د)^{٢} = (أ ب)^{٢} – (ب د)^{٢} = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤

∴ أ د = ٨ سم

جا ب = $\frac{المقابل}{الوتر} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

ق($\hat{ب}$) = $\frac{٤}{٥}$ Shift Sin =

مساحة سطح ∆ = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

= ٦ × ٨ = ٤٨ سم^{٢}

مثال ٤

في الشكل المقابل:

أ ب جـ د مستطيل فيه

أ ب = ١٥سم ، أ جـ = ٢٥سم

أوجد :

١- طول $\overline{ب جـ}$

٢- ق (أ $\hat{جـ}$ ب)

٣- مساحة المستطيل أ ب جـ د

أ ب جـ د ٢٥ سم ١٥ سم

الحل

في ∆ أ ب جـ من فيثاغورث :

(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} – (أ ب)^{٢}

= ٦٢٥ – ٢٢٥ = ٤٠٠

∴ ب جـ = ٢٠ سم المطلوب الأول

∵ جا (أ $\hat{جـ}$ ب) = $\frac{المقابل}{الوتر} = \frac{١٥}{٢٥}$

∴ ق (أ $\hat{جـ}$ ب) = $\frac{١٥}{٢٥}$ shift sin = ٣٦٫٥

مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ١٥ × ٢٠ = ٣٠٠ سم^{٢}

مثال ٥

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

فيه أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم

اثبت أن : جا² أ + ١ = ٢ جتا² جـ + جتا² أ

الحل

(أ ب)² = ١٠٠ ـ ٦٤ = ٣٦

∴ أ ب = ٦ سم

الأيمن = $\left(\frac{٨}{١٠}\right)^٢ + ١ = \frac{٦٤}{١٠٠} + ١ = \frac{١٦٤}{١٠٠}$

الأيسر = $٢ \times \left(\frac{٨}{١٠}\right)^٢ + \left(\frac{٦}{١٠}\right)^٢ = ٢ \times \frac{٦٤}{١٠٠} + \frac{٣٦}{١٠٠}$

$= \frac{١٢٨}{١٠٠} + \frac{٣٦}{١٠٠} = \frac{١٦٤}{١٠٠}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٦

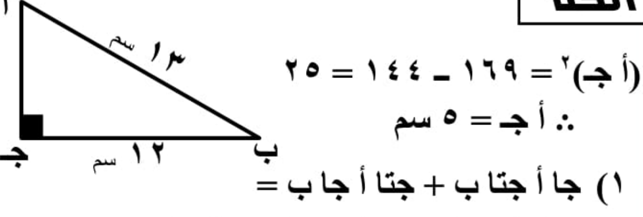
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ

حيث أب = ١٣ سم ، ب جـ = ١٢ سم

١) اثبت أن : جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = ١

٢) أوجد : ١ + ظا²أ

الحل



(أ جـ)² = ١٦٩ ـ ١٤٤ = ٢٥

∴ أ جـ = ٥ سم

١) جا أ جتا ب + جتا أ جا ب =

$\frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{١٤٤}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩}$

$= \frac{١٦٩}{١٦٩} = ١$

٢) $١ + ظا^٢أ = ١ + \left(\frac{١٢}{٥}\right)^٢ = ١ + \frac{١٤٤}{٢٥} = \frac{١٦٩}{٢٥}$

مثال ٧

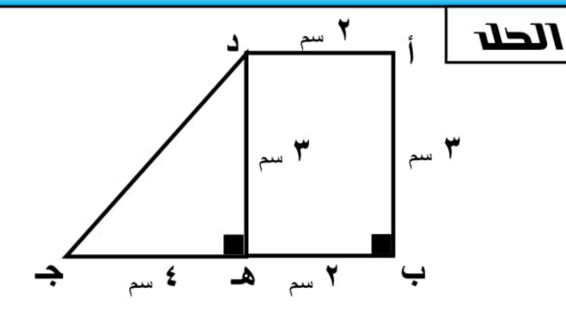
أ ب جـ د شبه منحرف فيه

$\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ق($\hat{ب}$) = ٩٠°

، أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٦ سم ، أ د = ٢ سم

أوجد طول د جـ ثم أوجد قيمة جتا (ب جـ د)

الحل



العمل: نرسم $\overline{د هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∴ الشكل أ ب هـ د مستطيل

د هـ = ٣ سم ، هـ جـ = ٦ـ٢ = ٤ سم

في Δ د هـ جـ : من فيثاغورث

(د جـ)² = ٣² + ٤² = ٢٥

∴ د جـ = ٥ سم

جتا (ب جـ د) = $\frac{المجاور}{الوتر} = \frac{٤}{٥}$

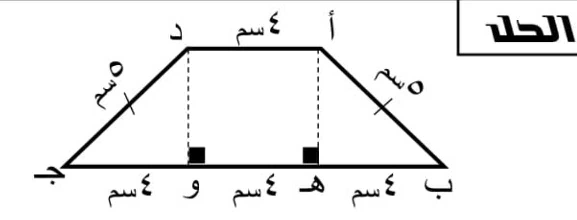
مثال ٨

أ ب جـ د شبه منحرف متساوى الساقين فيه

$\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أ د = ٤سم ، أ ب = ٥سم ، ب جـ = ١٢سم

اثبت أن : $\frac{٥ \text{ ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^٢ \text{ جـ} + \text{جتا}^٢ \text{ ب}} = ٣$

الحل



العمل: نرسم $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{د و}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∴ الشكل أ هـ و د مستطيل

∴ هـ و = ٤ سم ، ب هـ = و جـ = ٤ سم

في Δ أ هـ ب من فيثاغورث :

(أ هـ)² = ٢٥ ـ ١٦ = ٩

∴ أ هـ = ٣ سم ∴ د و = ٣ سم

الأيمن = $\frac{٥ \text{ ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^٢ \text{ جـ} + \text{جتا}^٢ \text{ ب}} = \frac{٥ \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٥}}{\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٥}\right)^٢} = \frac{٣}{١} = ٣$

تدريبات

١ في الشكل المقابل:

س ص ع ∆ قائم في ع

س ع = ٧سم ، س ص = ٢٥سم

١) أوجد: ظا س × طا ص

٢) اثبت أن: جا^{٢}س+جا^{٢}ص=١

ع ، ٧ سم ، س ، ٢٥ سم ، ص

الحل

....

٢ في الشكل المقابل:

أ ب جـ ∆ قائم في جـ

أ جـ = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم

١) أوجد: جتا أ جتا ب – جا أ جا ب

٢) أوجد ق (بˆ)

أ ، ٦ سم ، جـ ، ٨ سم ، ب

الحل

....

٣ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه :

س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣ سم

فأوجد قيمة جتا س جتا ع – حا س جا ع

الحل

....

٤ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب حيث:

أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٢٤ سم فأوجد قيمة:

١) ٣ ظا أ × ظا جـ ٢) جا^{٢} أ + جا^{٢} جـ

الحل

....

تمارين على النسب المثلثية للزاوية الحادة

(١) إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين ٣:٤

فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستينى

(٢) إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين

٢:٥ فأوجد قياس كل منهما بالقياس الستينى

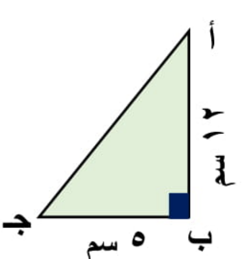
(٣) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث الداخلة

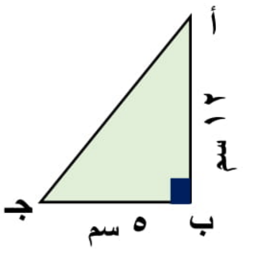
٢ : ٣ : ٤ فأوجد قياس كل منها بالقياس الستينى

(٤) في الشكل المقابل:

أوجد النسب المثلثية الأساسية

للزاويتين أ ، جـ



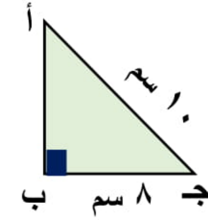


(٥) في الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث قائم في ب

أ جـ = ١٠سم ، جـ ب = ٨سم

أوجد قيمة: جا جـ جتا أ + جا أ جتا جـ



(٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{3}$ أ جـ

فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ

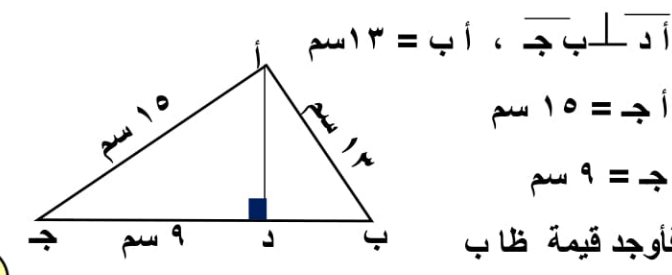
(٧) في الشكل المقابل:

$\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ب = ١٣سم

، أ جـ = ١٥ سم

د جـ = ٩ سم

فأوجد قيمة ظا ب



(٨) في الشكل المقابل:

أ ب جـ د مستطيل فيه

أ ب = ١٥سم ، أ جـ = ٢٥سم

أوجد :

١) طول أ جـ

٢) قيمة : ٥ ظا (أ د جـ) – ١٣ جا (د أ جـ)

٣) مساحة المستطيل أ ب جـ د

(٩) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ فيه

أ جـ = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم

أوجد قيمة: جتا أ جتا ب – جا أ جا ب

(١٠) في الشكل المقابل:

ق (أ د جـ) = ق (ب أ جـ) = ٩٠°

أ د = ٤سم ، جـ ب = ١٣سم

أوجد قيمة:

ظا (د أ جـ) جا (أجـب) – جا ب جتا (جـ أ د)

(١١) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم

ب جـ = ١٢ سم ، $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ يقطعه في د

١) اثبت أن: جا ب + جتا جـ = $\frac{7}{5}$

٢) أوجد قيمة جا^2 جـ + جتا^2 جـ

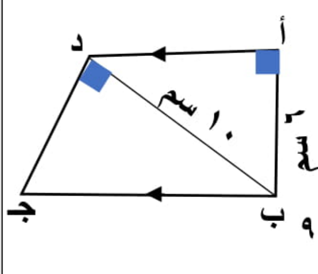
(١٢) في الشكل المقابل:

أ ب جـ د شبه منحرف قائم في ب

$\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أب = ٦ سم

ب د = ١٠ سم ، ق (ب $\hat{\text{د}}$ جـ) = ٩٠

أوجد ظا (أ د ب) ، طول $\overline{\text{د جـ}}$



النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

الزاوية ٣٠

- جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$
- جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
- ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

الزاوية ٦٠

- جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
- جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$
- ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

الزاوية ٤٥

- جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
- جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
- ظا ٤٥ = ١

ملاحظات هامة

١ جا^{٢} ٣٠ = $(\frac{١}{٢})^{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ ، جتا^{٢} ٣٠ = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ ، جا^{٢} ٤٥ = $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ وهكذا

خد بالك: $(\sqrt{٣})^{٢}$ = ٣ وليس ٩ $(\sqrt{٢})^{٢}$ = ٣ وليس ٤ وهكذا

٢ **جا الزاوية = جتا المتممة لها** مثل: جا ٣٠ = جتا ٦٠ ، جا ٧٠ = جتا ٢٠ ، جتا ٢٥ = جا ٦٥

٣ **ظا الزاوية = $\frac{\text{جا الزاوية}}{\text{جتا الزاوية}}$** مثل: ظا أ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ ، ظا ٣٠ = $\frac{\text{جا ٣٠}}{\text{جتا ٣٠}}$ ، $\frac{\text{جا ٥٠}}{\text{جتا ٥٠}}$ = ظا ٥٠

٤ لحساب النسب المثلثية لأى زاوية غير ٣٠ أو ٦٠ أو ٤٥ نحسبها باستخدام الآلة

فمثلا جا ٣٦ تكتب على الآلة: sin ٣٦ ، جتا ٥٠ تكتب: cos ٥٠ وهكذا

حساب قياس الزاوية بمعلومية النسبة المثلثية لها

- إذا كان جتا هـ = ٠,٧١٥٢ فإن ق $(\hat{هـ})$ = shift cos ٠,٧١٥٢ = ٤٤,٢°
- إذا كان جا هـ = ٠,٦٢١٨ فإن ق $(\hat{هـ})$ = shift sin ٠,٦٢١٨ = ٣٨° ٢٦ َ ٥٢ ً
- إذا كان ظا هـ = ١,٥١٥٦ فإن ق $(\hat{هـ})$ = shift tan ١,٥١٥٦ = ٥٦° ٣٤ َ ٥٩ ً
- إذا كان جتا هـ = ٠,٥ فإن ق $(\hat{هـ})$ = ٦٠° وإذا كان ظا هـ = ١ فإن ق $(\hat{هـ})$ = ٤٥°

حساب مثلثات

مثال ١
أوجد قيمة المقدار التالى مبينا خطوات الحل:

جا ٤٥ جتا ٤٥ + جا ٣٠ جتا ٦٠ – جتا^{٢} ٣٠

الحل

المقدار = $\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$

= $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤}$ = صفر

مثال ٢
بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

جتا ٦٠ = ٢ جتا^{٢} ٣٠ – ١

الحل

الأيمن = جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

الأيسر = ٢ جتا^{٢} ٣٠ – ١

= $٢ \times (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} - ١ = ٢ \times \frac{٣}{٤} - ١ = \frac{١}{٢}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣
بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

جتا ٦٠ جا ٣٠ – جا ٦٠ جتا ٣٠

الحل

المقدار = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= $\frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

مثال ٤
بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

جا^{٢} ٣٠ = ٥ جتا^{٢} ٦٠ – ظا^{٢} ٤٥

الحل

الأيمن = جا^{٢} ٣٠ = $(\frac{١}{٢})^{٢} = \frac{١}{٤}$

الأيسر = ٥ جتا^{٢} ٦٠ – ظا^{٢} ٤٥

= $٥ \times (\frac{١}{٢})^{٢} - ١^{٢}$

= $٥ \times \frac{١}{٤} - ١ = \frac{٥}{٤} - ١ = \frac{١}{٤}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٥
أوجد قيمة المقدار: $\frac{\text{جتا}^{٢}\ ٦٠ + \text{جتا}^{٢}\ ٣٠}{\text{جا}\ ٦٠\ \text{ظا}\ ٦٠}$

الحل

المقدار = $\frac{(\frac{١}{٢})^{٢} + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣}}$

= $\frac{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}}{\frac{٣}{٢}} = \frac{١}{\frac{٣}{٢}} = ١ \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$

مثال ٦
اثبت أن: ظا ٦٠ = $\frac{٢\ \text{ظا}\ ٣٠}{١ - \text{ظا}^{٢}\ ٣٠}$

الحل

الطرف الأيمن = ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

الأيسر = $\frac{٢ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - (\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٢}} = \frac{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}{\frac{٢}{٣}}$

= $\frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$ = الأيمن

حساب مثلثات

مثال ٧

أوجد قيمة س التي تحقق :

ظا س = ٤ جتا ٦٠ جا ٣٠

حيث س زاوية حادة

الحل

ظا س = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$

ظا س = ٤ × $\frac{١}{٤}$

ظا س = ١

∴ س = ٤٥

مثال ٨

بدون استخدام الآلة أوجد قيمة س حيث :

٢ جا س = جا٣٠ جتا٦٠ + جتا٣٠ جا ٦٠

الحل

٢ جا س = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢ جا س = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٣}{٤}$

٢ جا س = ١

∴ جا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠

مثال ٩

أوجد قيمة هـ حيث هـ زاوية حادة إذا كان:

جا هـ = جا ٦٠ جتا ٣٠ – جتا ٦٠ جا ٣٠

الحل

جا هـ = جا ٦٠ جتا ٣٠ – جتا ٦٠ جا ٣٠

جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$

جا هـ = $\frac{٣}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠°

مثال ١٠

أوجد قيمة س التي تحقق

٢ جا س = ظا^{٢} ٦٠ ـ ٢ ظا ٤٥

حيث س زاوية حادة

الحل

٢ جا س = ظا^{٢} ٦٠ ـ ٢ ظا ٤٥

٢ جا س = $(\sqrt{٣})^{٢}$ ـ ٢ × ١

٢ جا س = ٣ ـ ٢

٢ جا س = ١

جا س = $\frac{١}{٢}$

∴ س = ٣٠

مثال ١١

إذا كان جا هـ ظا ٣٠ = جتا^{٢} ٤٥

فأوجد ق (هـ) حيث هـ زاوية حادة

الحل

جا هـ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢}$

جا هـ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{٢}$

جا هـ = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٣}$

جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ق ($\hat{هـ}$) = ٦٠°

مثال ١٢

إذا كانت جا س = ظا ٣٠ جا ٦٠

حيث س زاوية حادة فأوجد قيمة: ٤ جتا س جا س

الحل

جا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جا س = $\frac{١}{٢}$ س = ٣٠

∴ ٤ جتا س جا س = ٤ جتا ٣٠ جا ٣٠

= ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\sqrt{٣}$

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

جتا ٦٠ جا ٣٠ – جا ٦٠ ظا ٦٠ + $\text{جتا}^{٢}$ ٣٠

الحل

....

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن:

$\text{ظا}^{٢}$ ٦٠ – $\text{ظا}^{٢}$ ٤٥ = ٤ جا ٣٠

الحل

....

٣ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان:

ظا ٢س = ٤ جا ٣٠ جتا ٣٠

الحل

....

٤ أوجد قيمة س (حيث س زاوية حادة) التي تحقق:

س جتا ٦٠ = جا ٣٠ + ظا ٤٥

الحل

....

أسئلة اختر على حساب المثلثات

١) جا ٤٥ جتا ٤٥ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٢) ٤ جتا ٣٠ ظا ٦٠ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) $\sqrt{٣}$

٣) جا ٣٠ ظا ٦٠ = ...

(أ) جا ٣٠ (ب) جا ٦٠ (جـ) جتا٤٥ (د) ظا ٣٠

٤) إذا كان جا هـ = جتا هـ فإن ق($\hat{هـ}$) = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

٥) في ∆ أ ب جـ القائم الزاوية في ب يكون جا أ + جتا جـ = ...

(أ) ٢جا جـ (ب) ٢جا ب (جـ) ٢ جا أ (د) ٢جتا أ

٦) إذا كان جا٢س = ٠,٥ وكانت س زاوية حادة فإن ق ($\hat{س}$) = ...

(أ) ٧٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٥ (د) ٣٠

٧) إذا كان جتا ٣س = $\frac{١}{٢}$ حيث ٣س زاوية حادة فإن ق ($\hat{س}$) = ...

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

٨) إذا كان جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن س = ...

(أ) ١٥ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

٩) إذا كان جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ حيث $\frac{س}{٢}$ زاوية حادة فإن ق ($\hat{س}$) = ...

(أ) ١٠٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٣٠ (د) ١١٠

١٠) في إذا كان ظا ٣س = ١ فإن ق ($\hat{س}$) = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٤٥

١١) ظا ٤٥ جا ٣٠ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

١٢) ظا ٤٥ + جا ٣٠ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

تمارين على النسب المثلثية لبعض الزوايا

أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

١) جتا^2 ٣٠ + جتا^2 ٦٠ + ٢ جا ٣٠

٢) جتا ٦٠ جا ٣٠ – جا ٦٠ جتا ٣٠

٣) ظا^2 ٦٠ – ٢ جا٤٥ جتا ٤٥

٤) $\frac{\text{جا ٣٠}}{\text{جتا ٦٠}}$ – جتا ٣٠ جا ٦٠

٥) (جتا ٣٠ – جتا ٦٠) (جا٦٠ + جا٣٠)

٦) $\frac{\text{جتا}^2\text{ ٦٠ + جتا}^2\text{ ٣٠ + ظا}^2\text{ ٤٥}}{\text{جا ٦٠ ظا ٦٠ + جا ٣٠}}$

ب) بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن:

١) ٤ جا ٤٥ جتا ٤٥ = ٢

٢) جتا^2 ٦٠ = ٥ جا^2 ٣٠ – ظا^2 ٤٥

٣) جتا^2 ٦٠ = جتا^2 ٣٠ ظا^2 ٣٠ ظا ٤٥

٤) ظا^{2}٦٠ – ظا^{2}٤٥ = جا^{2}٦٠ + جتا^{2}٦٠ + ٢جا٣٠

٥) ٢ جا ٣٠ + ٤ جتا ٦٠ = ظا^{2}٦٠

٦) جا ٦٠ = ٢ جا ٣٠ جتا ٣٠

٧) جا^2 ٤٥ ظا^2 ٦٠ – ٢ جا^2 ٦٠ = صفر

٨) ٤ جا ٣٠ + ظا^2 ٤٥ = ظا^2 ٦٠

٩) جا^2 ٦٠ = ٢ جا ٣٠ جتا^2 ٣٠

١٠) جتا ٦٠ = جتا^2 ٣٠ – جا^2 ٣٠

١١) جا^3 ٣٠ = ٩ جتا^3 ٦٠ – ظا ٤٥

١٢) ظا ٦٠ = ٢ ظا٣٠ ÷ (١ – ظا^2 ٣٠)

جـ) أوجد قيمة س التي تحقق الآتى حيث أن س زاوية حادة :

١) ظا س = ٤ جا ٣٠ جتا ٦٠

٢) جا س = ٢ جا٣٠ جتا٦٠

٣) جا س = ٣ جا٣٠ جتا٦٠

٤) جا س = جا ٦٠ جتا ٣٠ – جتا ٦٠ جا ٣٠

٥) س جا ٣٠ جتا^2 ٤٥ = جتا^2 ٣٠

٦) س – جا ٣٠ جتا^2 ٤٥ = جا^2 ٦٠

٧) ٤ س = جتا^2 ٣٠ ظا^2 ٣٠ ظا^2 ٤٥

٨) ظا س = جتا^2 ٣٠ – جا^2 ٣٠

٩) س جتا ٦٠ جتا^2 ٤٥ = جا^2 ٦٠

١٠) ٣ ظا س = ٢ جا٣٠ + ٤ جتا٦٠

١١) س جا^2 ٤٥ = ظا^2 ٦٠

١٢) جا س جا^2 ٦٠ = ٣جا^2 ٤٥ جتا^2 ٤٥ جتا ٦٠

د) إذا كان ظا س = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ حيث س زاوية حادة

فأوجد قيمة: جا س ظا ($\frac{\text{٣ س}}{\text{٢}}$) + جتا (٢س)

هـ) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{3}$ أ جـ

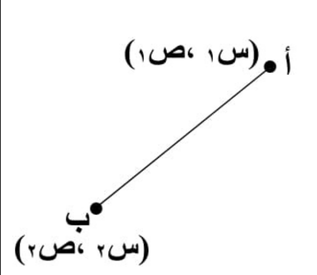
فأوجد قيمة: جتا جـ جا أ – جا جـ جتا أ

البعد بين نقطتين

إذا كانت النقطة أ (س١ ،ص١) ، النقطة ب (س٢ ، ص٢) فإنه يمكن حساب البعد بين النقطتين بالقانون:

البعد بين نقطتين = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

أي أن البعد = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$



مثال ١

أوجد البعد بين النقطتين (٣،٢) ، (٥،١)

الحل

البعد = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

= $\sqrt{(٥- ٣)^٢ + (١ - ٢)^٢}$ = $\sqrt{٢^٢ + (-١)^٢}$

= $\sqrt{٤ + ١}$ = $\sqrt{٥}$

مثال ٢

إذا كانت أ (٦،-٢) ، ب (١،-١) فأوجد طول أ ب

الحل

أ ب = $\sqrt{(١- ٦)^٢ + (-١ - -٢)^٢}$ = $\sqrt{(-٥)^٢ + ١^٢}$

= $\sqrt{٢٥ + ١}$ = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول

ملاحظات هامة

١ لحساب طول ضلع نحسب البعد بين نقطة بدايته ونقطة نهايته.

٢ البعد بين النقطة (س ، ص) ونقطة الأصل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

٣ بعد النقطة (س،ص) عن محور الصادات = |س| بينما بعد النقطة عن محور السينات = |ص|

مثال : بعد النقطة (-٥ ، -٢) عن محور الصادات = ٥ ، بعد النقطة (-٣، ٤) عن محور السينات = ٤

٤ نوع المثلث بالنسبة لأضلاعه ٣ أنواع : متساوى الساقين ـ متساوى الأضلاع ـ مختلف الأضلاع

٥ نوع المثلث بالنسبة لزواياه ٣ أنواع : حاد ـ قائم ـ منفرج

قوانين المساحات

- مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × ع
- مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى القطرين
- مساحة المربع = طول الضلع × نفسه
- مساحة الدائرة = π نق^٢
- مساحة المستطيل = الطول × العرض
- محيط الدائرة = ٢ π نق

إثباتات هامة باستخدام البعد

إثبات أن: أ ،ب، جـ رؤوس مثلث

نحسب: طول أ ب ، ب جـ ، أ جـ

نثبت ن : مجموع طولى أي ضلعين > طول الثالث

مثل : أ ب + ب جـ > أ جـ

إثبات أن: Δ أ ب جـ قائم في ب

نحسب: طول أ ب ، ب جـ ، أ جـ ثم نربع النواتج

نثبت أن: $(أ جـ)^2$ الأكبر = $(أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

إثبات أن: Δ أ ب جـ منفرج

نحسب: طول أ ب ، ب جـ ، أ جـ ثم نربع النواتج

نثبت أن: $(أ جـ)^2$ الأكبر > $(أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

إثبات أن: Δ أ ب جـ حاد

نحسب: طول أ ب ، ب جـ ، أ جـ ثم نربع النواتج

نثبت أن: $(أ جـ)^2$ الأكبر < $(أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

إثبات أن: الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع

- نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة
- نثبت أن : كل ضلعان متقابلان متساويان

أى أن : أ ب = جـ د ، ب جـ = أ د

إثبات أن: الشكل أ ب جـ د معين

- نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة
- نثبت أن أضلاعه الأربعة متساوية في الطول

أ ب = ب جـ = جـ د = أ د

إثبات أن: الشكل مستطيل

نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة والقطران

- نثبت أنه متوازى أضلاع (كل ضلعان متقابلان متساويان)
- نثبت أن القطران متساويان

إثبات أن: الشكل مربع

نحسب: أطوال أضلاعه الأربعة والقطران

- نثبت أن أضلاعه الأربعة متساوية في الطول
- نثبت أن القطران متساويان

إثبات أن: النقط تقع على استقامة واحدة

نحسب: طول أب ، ب جـ ، أ جـ

نثبت أن: الطول الأكبر = مجموع الطولين الآخرين

إثبات أن: النقط أ،ب،جـ تمر بدائرة مركزها م

نحسب: طول أ م ، ب م ، جـ م بالبعد

ثم نثبت أن: أ م = ب م = جـ م = نق

مثال ١

اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط

أ (٥،-٥) ، ب (-١،٧) ، جـ (١٥،١٥)

قائم الزاوية فى ب ، ثم أوجد مساحته

الحل

$أب = \sqrt{(-١-٥)^٢ + (٧--٥)^٢} = \sqrt{(-٦)^٢ + ١٢^٢}$

$= \sqrt{٣٦ + ١٤٤} = \sqrt{١٨٠}$

$ب جـ = \sqrt{(١٥--١)^٢ + (١٥-٧)^٢} = \sqrt{١٦^٢ + ٨^٢}$

$= \sqrt{٢٥٦ + ٦٤} = \sqrt{٣٢٠}$

$أ جـ = \sqrt{(١٥-٥)^٢ + (١٥--٥)^٢} = \sqrt{١٠^٢ + ٢٠^٢}$

$= \sqrt{١٠٠ + ٤٠٠} = \sqrt{٥٠٠}$

$(أ جـ)^٢ = ٥٠٠$

$(أب)^٢ + (ب جـ)^٢ = ١٨٠ + ٣٢٠ = ٥٠٠$

∵ $(أ جـ)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢$ ∴ المثلث قائم فى ب

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × ع

$= \frac{\sqrt{١٨٠} \times \sqrt{٣٢٠}}{٢} = ١٢٠$

مثال ٢

بين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط

أ (٣،٣) ، ب (١،٥) ، جـ (١،٣)

بالنسبة لأضلاعه

الحل

$أب = \sqrt{(١-٣)^٢ + (٥-٣)^٢} = \sqrt{(-٢)^٢ + ٢^٢}$

$= \sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨}$

$ب جـ = \sqrt{(١-١)^٢ + (٣-٥)^٢} = \sqrt{٠^٢ + (-٢)^٢}$

$= \sqrt{٠ + ٤} = \sqrt{٤} = ٢$

$أ جـ = \sqrt{(١-٣)^٢ + (٣-٣)^٢} = \sqrt{(-٢)^٢ + ٠^٢}$

$= \sqrt{٤ + ٠} = \sqrt{٤} = ٢$

∵ ب جـ = أ جـ

∴ Δ متساوى الساقين

مثال ٣

اثبت باستخدام البعد أن النقط

أ (-٣،-١) ، ب (٦،٥) ، جـ (٣،٣)

تقع على استقامة واحدة

الحل

$أب = \sqrt{(٦--٣)^٢ + (٥--١)^٢} = \sqrt{٩^٢ + ٦^٢}$

$= \sqrt{٨١ + ٣٦} = \sqrt{١١٧}$

$ب جـ = \sqrt{(٣-٦)^٢ + (٣-٥)^٢} = \sqrt{(-٣)^٢ + (-٢)^٢}$

$= \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$

$أ جـ = \sqrt{(٣--٣)^٢ + (٣--١)^٢} = \sqrt{٦^٢ + ٤^٢}$

$= \sqrt{٣٦ + ١٦} = \sqrt{٥٢}$

أب = ١٠,٨١٧ ، ب جـ + أ جـ = ١٠,٨١٧

∵ أب = ب جـ + أ جـ

∴ النقط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

مثال ٤

اثبت أن النقط أ (٣،-١) ، ب (-٤،٦) ، جـ (٢ ، -٢) الواقعة فى مستوى إحداثى متعامد تمر بها دائرة واحدة مركزها م (-١،٢) ثم أوجد محيط الدائرة

الحل

$أم = \sqrt{(٣--١)^٢ + (-١-٢)^٢} = \sqrt{٤^٢ + (-٣)^٢}$

$= \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$

$ب م = \sqrt{(-٤--١)^٢ + (٦-٢)^٢} = \sqrt{(-٣)^٢ + ٤^٢}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

$جـ م = \sqrt{(٢--١)^٢ + (-٢-٢)^٢} = \sqrt{٣^٢ + (-٤)^٢}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

∵ أم = ب م = جـ م

∴ النقط تمر بها دائرة واحدة

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٣,١٤ × ٥ = ٣١,٤

مثال ٥

أ ب جـ د شكل رباعى حيث

أ (٥،٣) ، ب (٦،-٢) ، جـ (١،-١) ، د (٠،٤)

اثبت أن الشكل أ ب جـ د معين وأوجد مساحته

الحل

$\text{أ ب} = \sqrt{(٦ - ٥)^٢ + (-٢ - ٣)^٢} = \sqrt{٢٦}$

$\text{ب جـ} = \sqrt{(١ - ٦)^٢ + (-١ - -٢)^٢} = \sqrt{٢٦}$

$\text{جـ د} = \sqrt{(٠ - ١)^٢ + (٤ - -١)^٢} = \sqrt{٢٦}$

$\text{أ د} = \sqrt{(٠ - ٥)^٢ + (٤ - ٣)^٢} = \sqrt{٢٦}$

∵ أ ب = ب جـ = جـ د = أ د ∴ الشكل معين

مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه

$\text{أ جـ} = \sqrt{(١ - ٥)^٢ + (-١ - ٣)^٢} = \sqrt{٣٢}$

$\text{ب د} = \sqrt{(٠ - ٦)^٢ + (٤ - -٢)^٢} = \sqrt{٧٢}$

مساحة المعين = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{٣٢} \times \sqrt{٧٢} = ٢٤$

مثال ٦

أ ب جـ د شكل رباعى حيث

أ (٢،٤) ، ب (-٣،٠) ، جـ (-٧،٥) ، د (-٢،٩)

اثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع وأوجد مساحته

الحل

$\text{أ ب} = \sqrt{(-٣ - ٢)^٢ + (٠ - ٤)^٢} = \sqrt{٤١}$

$\text{ب جـ} = \sqrt{(-٧ - -٣)^٢ + (٥ - ٠)^٢} = \sqrt{٤١}$

$\text{جـ د} = \sqrt{(-٢ - -٧)^٢ + (٩ - ٥)^٢} = \sqrt{٤١}$

$\text{أ د} = \sqrt{(-٢ - ٢)^٢ + (٩ - ٤)^٢} = \sqrt{٤١}$

نحسب القطران أ جـ ، ب د

$\text{أ جـ} = \sqrt{(-٧ - ٢)^٢ + (٥ - ٤)^٢} = \sqrt{٨٢}$

$\text{ب د} = \sqrt{(-٢ - -٣)^٢ + (٩ - ٠)^٢} = \sqrt{٨٢}$

∵ أ ب = ب جـ = جـ د = أ د ، أ جـ = ب د

∴ الشكل مربع

مساحة المربع = $\sqrt{٤١} \times \sqrt{٤١} = ٤١$ وحدة طول مربعة

مثال ٧

إذا كان بعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦،١) يساوى $٢\sqrt{٥}$ فأوجد قيمة س

الحل

البعد = $\sqrt{\text{فرق السينات}^٢ + \text{فرق الصادات}^٢}$

∴ $(٢\sqrt{٥})^٢ = (\text{س} - ٦)^٢ + (٥ - ١)^٢$

$٤ \times ٥ = (\text{س} - ٦)^٢ + ١٦$

$٢٠ = (\text{س} - ٦)^٢ + ١٦$ ننقل الـ ١٦

$٢٠ - ١٦ = (\text{س} - ٦)^٢$

$٤ = (\text{س} - ٦)^٢$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

س − ٦ = ٢ ∴ س = ٨

أو س − ٦ = -٢ ∴ س = ٤

مثال ٨

إذا كانت أ (س ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (٥ ، ١) وكانت أ ب = ب جـ فأوجد قيمة س

الحل

$\text{ب جـ} = \sqrt{(٣ - ٥)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$

∵ أ ب = ب جـ

∴ $\sqrt{(\text{س} - ٣)^٢ + (٣ - ٢)^٢} = \sqrt{٥}$ بتربيع الطرفين

$(\text{س} - ٣)^٢ + ١ = ٥$

$(\text{س} - ٣)^٢ = ٤$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

∴ س − ٣ = ٢ ∴ س = ٥

أو س − ٣ = -٢ ∴ س = ١

إعداد أ/ محمود عوض حسن

١

أ ب جـ مثلث فيه

أ (٢،٨) ، ب (-١،٤) ، جـ (٣،١)

بين نوع المثلث أ ب جـ بالنسبة لزواياه

الحل

....

٢

إذا كانت النقط أ (٣،٢) ، ب (٤،-٣)

، جـ (-١،-٢) ، د (-٢،٣) هي رؤوس معين

فأوجد مساحة المعين أ ب جـ د

الحل

....

٣

اثبت أن النقط أ (-١،-٤) ، ب (١،٠)

، جـ (٢،٢) تقع على استقامة واحدة

الحل

....

٤

إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (٠ ، ٣)

يساوى ٥ وحدات طول فأوجد قيمة أ

الحل

....

أسئلة اختر على درس البعد

١) البعد بين النقطتين (٢،٠) ، (٥،٠) هو .... وحدة طول

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) $\sqrt{29}$ (د) ٣

٢) بعد النقطة (٢،-٤) عن محور السينات = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) -٤ (د) ٦

٣) المسافة بين النقطة (٣،٤) والمحور الصادى هى .... وحدة طول

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧

٤) بعد النقطة (٣ ، ٤) عن نقطة الأصل = ... وحدة طول

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ٥

٥) البعد العمودى بين المستقيمين س – ٢ = ٠ ، س + ٣ = ٠ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢ (د) ٣

٦) البعد العمودى بين المستقيمين ص + ١ = ٠ ، ص + ٣ = ٠ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٥

٧) طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٠،٠) ، (٥،١٢) = ... وحدة طول

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ١٣

٨) طول نصف قطر الدائرة التي مركزها (٠ ، ٠) ، وتمر بالنقطة (٣ ، ٤) يساوى ....

(أ) ٧ (ب) ١ (جـ) ١٢ (د) ٥

٩) البعد بين النقطة (٥ ، ظا^{2} ٦٠) ومحور السينات = ...

(أ) ٥ (ب) $\sqrt{5}$ (جـ) ٣ (د) $\sqrt{3}$

١٠) طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (-١،٤) ، (٥،١٢) = ... وحدة طول

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٣

١١) إذا كان البعد بين النقطتين (أ،٠) ، (١،٠) هو وحدة طول فإن أ = ...

(أ) -١ (ب) ٠ (جـ) ١ (د) ±١

١٢) دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول فأى من النقاط الأتية تنتمى للدائرة ....

(أ) (١،٢) (ب) (-٢،١) (جـ) ($\sqrt{3}$ ،١) (د) ($\sqrt{2}$ ،١)

١٣) النقط (٠،٠) ، (٣،٠) ، (٠،٤) تكون ....

(أ) Δ حاد (ب) Δ منفرج (جـ) Δ قائم (د) على استقامة واحدة

تمارين على البعد بين نقطتين

١ إذا كانت أ (٢،٨) ، ب (-١،٤) ، جـ (٣،١)
اثبت ان المثلث أ ب جـ متساوى الساقين

---

٢ اثبت أن النقط أ (٥،٣) ، ب (٣،-٢) ،
جـ (-٢ ، -٤) هي رؤوس مثلث

---

٣ بين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط
أ (٣،٠) ، ب (١،٤) ، جـ (-١،٢)
من حيث أطوال أضلاعه

---

٤ اثبت أن الشكل الذى رؤوسه النقط
أ (-١،٣) ، ب (٥،١) ، جـ (٧،٤) ، د (١،٦)
متوازى أضلاع

---

٥ أوجد مساحة المستطيل أ ب جـ د حيث:
أ (-١،٣) ، ب (٥،١) ، جـ (٦،٤) ، د (٠،٦)

---

٦ اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط
أ (١ ، ٤) ، ب (-١ ، -٢) ، جـ (٢ ، -٣)
قائم الزاوية في ب وأوجد مساحته

---

٧ إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ١)
يساوى $\sqrt{٢}$ وحدة طول فأوجد قيمة أ

---

٨ اثبت أن النقط أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ١)
، جـ (-٥ ، -٣) تقع على استقامة واحدة

---

٩ اثبت أن النقط أ (-٢،٠) ، ب (٥،١)
، جـ (٦،-٦) الواقعة في مستوى إحداثى متعامد تمر بها دائرة مركزها (٢ ، -٣)
ثم أوجد محيط ومساحة الدائرة بدلالة π

---

١٠ س ص ع ل معين رؤوسه س (٣،٢) ،
ص (٤، -٣) ، ع (-١، -٢) ، ل (-٢ ، ٣)
أوجد مساحة سطحه

---

١١ أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (٢،٤)
، ب (-٣،٤) ، جـ (-٣ ، -١) ، د (٢ ، -١)
اثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع وأوجد مساحة سطحه

---

١٢ أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (-١، ٣)
، ب (٥،١) ، جـ (٦،٤) ، د (٠،٦)
اثبت أن الشكل أ ب جـ د مستطيل

---

١٣ أ ب جـ مثلث حيث أ (٥ ، ٣)
، ب (٣ ، - ٢) ، جـ (-٢ ، -٤)
بين نوع المثلث أ ب جـ بالنسبة لزواياه

---

١٤ إذا كانت أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ١) ، جـ (-٥ ، -٣)
بين هل النقط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة أم لا؟

---

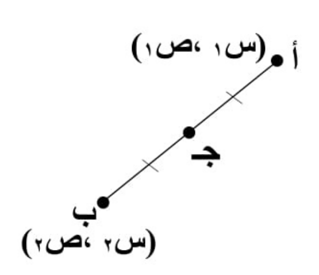
١٥ دائرة مركزها النقطة م (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة
(٣ ، ١) احسب مساحة الدائرة

إحداثى منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت النقطة أ (س١ ،ص١) ، النقطة ب (س٢ ، ص٢) فإنه يمكن حساب إحداثى نقطة منتصف $\overline{أب}$ بالقانون:

$$\text{إحداثى المنتصف} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} \text{ ، } \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$



ملاحظات هامة

١ **الفكرة المباشرة:** يكون معلوم لديك إحداثى البداية والنهاية وتحسب إحداثى المنتصف (زى مثال ١)

٢ **الفكرة غير المباشرة:** يكون معلوم لديك إحداثى المنتصف والبداية وتحسب إحداثى النهاية (زى مثال ٢)
أو يكون معلوم لديك إحداثى المنتصف والنهاية وتحسب إحداثى البداية

٣ مجموع السينات يقصد به سينات البداية والنهاية هي التي تجمع (إياك تجمع سينات المنتصف مع أي حاجة)

٤ متوازى الأضلاع والمربع والمستطيل والمعين فيهم : القطران ينصف كل منهما الآخر

٥ مركز الدائرة هو منتصف القطر

مثال ١ إذا كان أ ب قطر في الدائرة التي مركزها م حيث أ (٤،-١) ، ب (-٢،٧) فأوجد إحداثى المركز م

الحل

(أ (٤،-١) ، ب (-٢،٧) ، م)

م هي منتصف القطر أ ب

$$\text{إحداثى المنتصف} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{٤ + -٢}{٢} \text{ ، } \frac{-١ + ٧}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{٢}{٢} \text{ ، } \frac{٦}{٢}\right) = (١ \text{ ، } ٣)$$

مثال ٢ إذا كانت جـ (٦ ، -٤) هى منتصف أ ب حيث أ (٥ ، - ٣) فأوجد إحداثى نقطة ب

الحل

نفرض أن ب (س ، ص)

$$\text{إحداثى المنتصف} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢}\right)$$

$$\therefore (٦ \text{ ، } -٤) = \left(\frac{٥ + س}{٢} \text{ ، } \frac{-٣ + ص}{٢}\right)$$

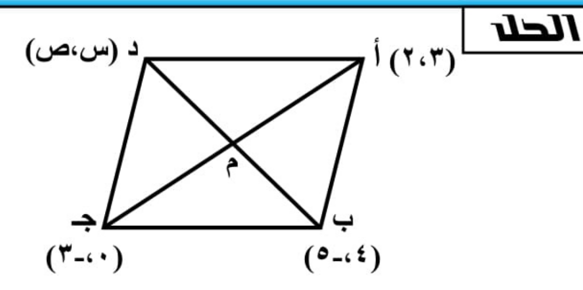
$\frac{٥ + س}{٢} = ٦$	$\frac{-٣ + ص}{٢} = -٤$
٥ + س = ١٢	-٣ + ص = -٨
س = ٧	ص = -٥

∴ إحداثى ب = (٧ ، -٥)

مثال ٣

أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ (٣،٢) ، ب (٤، -٥) ، جـ (٠، -٣) أوجد إحداثى نقطة تقاطع قطريه ثم أوجد إحداثى نقطة د

الحل



نقطة تقاطع القطرين هى م منتصف أ جـ

م منتصف أ جـ = $\left(\frac{٠ + ٣}{٢} ، \frac{-٣ + ٢}{٢} \right) = \left(\frac{٣}{٢} ، \frac{-١}{٢} \right)$

نفرض أن النقطة د هى (س ، ص)

∵ منتصف أ جـ = منتصف ب د

∴ $\left(\frac{٣}{٢} ، \frac{-١}{٢} \right) = \left(\frac{٤ + س}{٢} ، \frac{-٥ + ص}{٢} \right)$

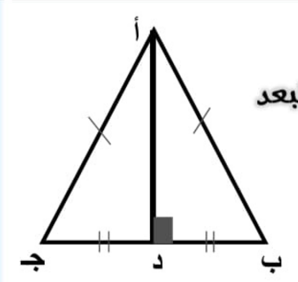
المسقط الأول = المسقط الأول	المسقط الثانى = المسقط الثانى
$\frac{٤ + س}{٢} = \frac{٣}{٢}$	$\frac{-٥ + ص}{٢} = \frac{-١}{٢}$
٤ + س = ٣	-٥ + ص = -١
س = -١	ص = ٤

∴ إحداثى د = (-١ ، ٤)

مثال ٤

اثبت أن النقط أ (-٣،٠) ، ب (٣،٤) ، جـ (١،-٦) هي رؤوس مثلث متساوى الساقين رأسه أ ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ وعمودية على ب جـ

الحل



إثبات أن Δ متساوى الساقين بالبعد

حساب إحداثى د بالمنتصف

حساب طول أ د بالبعد

أ ب = $\sqrt{(-٣ - ٣)^٢ + (٠ - ٤)^٢} = \sqrt{٦^٢ + ٤^٢}$
= $\sqrt{٣٦ + ١٦} = \sqrt{٥٢}$

أ جـ = $\sqrt{(-٣ - ١)^٢ + (٠ - -٦)^٢} = \sqrt{٤^٢ + (-٦)^٢}$
= $\sqrt{١٦ + ٣٦} = \sqrt{٥٢}$

∵ أ ب = أ جـ ∴ Δ متساوى الساقين

∵ أ د ⊥ ب جـ ∴ د منتصف ب جـ

د (منتصف ب جـ) = $\left(\frac{٣ + ١}{٢} ، \frac{٤ + -٦}{٢} \right)$ = (٢ ، -١)

∵ أ (-٣،٠) ، د (٢،-١)

∴ أ د = $\sqrt{(-٣ - ٢)^٢ + (٠ - -١)^٢} = \sqrt{٥^٢ + (-١)^٢}$
= $\sqrt{٢٥ + ١} = \sqrt{٢٦}$ وحدة طول

٥

إذا كانت أ (-١ ، -١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٦ ، ٠) ، د (٣ ، -٤) اثبت أن أ جـ ، ب د ينصف كل منهما الآخر

الحل

منتصف أ جـ = $\left(\frac{-١ + ٦}{٢} ، \frac{-١ + ٠}{٢} \right) = \left(\frac{٥}{٢} ، \frac{-١}{٢} \right)$

منتصف ب د = $\left(\frac{٢ + ٣}{٢} ، \frac{٣ + -٤}{٢} \right) = \left(\frac{٥}{٢} ، \frac{-١}{٢} \right)$

∵ منتصف أ جـ = منتصف ب د

∴ أ جـ ، ب د ينصف كل منهما الآخر

٦

أ ب قطر في الدائرة التي مركزها م حيث ب (٨ ، ١١) ، م ((٥ ، ٧) فأوجد :

١) إحداثى النقطة أ ٢) طول نصف قطر الدائرة

الحل

مركز الدائرة م هو منتصف القطر أ ب

نفرض أن احداثى أ = (س ، ص)

المنتصف = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$

(٥ ، ٧) = $\left(\frac{س + ٨}{٢} ، \frac{ص + ١١}{٢} \right)$

$\frac{س + ٨}{٢} = ٥$	$\frac{ص + ١١}{٢} = ٧$
س + ٨ = ١٠	ص + ١١ = ١٤
∴ س = ٢	∴ ص = ٣

إحداثى أ = (٢ ، ٣)

طول نصف القطر م ب = $\sqrt{(٨ - ٥)^٢ + (١١ - ٧)^٢} = ٥$

مثال ٧

إذا كانت أ (١،-٦) ، ب (٩،٢) فأوجد إحداثيات النقط التى تقسم أ ب إلى أربعة أجزاء متساوية الطول

الحل

أ (١،-٦) ، د ، جـ ، هـ ، ب (٩،٢)

إحداثى المنتصف = (مجموع السينات / ٢ ، مجموع الصادات / ٢)

إحداثى جـ (منتصف أب) = ((٩+١)/٢ ، (٢+-٦)/٢) = (٥ ، -٢)

إحداثى د (منتصف أجـ) = ((٥+١)/٢ ، (-٢+-٦)/٢) = (٣ ، -٤)

إحداثى هـ (منتصف جـ ب) = ((٩+٥)/٢ ، (٢+-٢)/٢) = (٧ ، ٠)

مثال ٨

إذا كانت النقطة (٣،١) في منتصف البعد بين النقطتين (١ ، ص) ، (س ، ٣) فأوجد النقطة (س،ص)

الحل

أ (١،ص) ، جـ (٣،١) ، ب (س،٣)

إحداثى المنتصف = (مجموع السينات / ٢ ، مجموع الصادات / ٢)

∴ (٣،١) = ((١+س)/٢ ، (ص+٣)/٢)

(١+س)/٢ = ٣	(ص+٣)/٢ = ١
١ + س = ٦	ص + ٣ = ٢
س = ٥	ص = -١

∴ (س ، ص) = (٥ ، -١)

مثال ٩

اثبت أن النقط أ (٦،٠) ، ب (٢،-٤) ، جـ (-٤،٢) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب ، ثم أوجد إحداثى نقطة د التي تجعل الشكل أ ب جـ د مستطيلا

الحل

أب = $\sqrt{(٢-٦)^٢ + (-٤-٠)^٢}$ = $\sqrt{(-٤)^٢ + (-٤)^٢}$

= $\sqrt{١٦ + ١٦}$ = $\sqrt{٣٢}$

ب جـ = $\sqrt{(-٤-٢)^٢ + (٢--٤)^٢}$ = $\sqrt{(-٦)^٢ + ٦^٢}$

= $\sqrt{٣٦ + ٣٦}$ = $\sqrt{٧٢}$

أ جـ = $\sqrt{(-٤-٦)^٢ + (٢-٠)^٢}$ = $\sqrt{(-١٠)^٢ + ٢^٢}$

= $\sqrt{١٠٠ + ٤}$ = $\sqrt{١٠٤}$

$(أجـ)^٢$ = ١٠٤

$(أب)^٢ + (ب جـ)^٢$ = ٧٢+٣٢ = ١٠٤

∵ $(أجـ)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢$ ∴ المثلث قائم

أ (٦،٠) ، ب (٢ ، -٤) ، جـ (-٤،٢) ، د (س ، ص)

منتصف أ جـ = ((٦+-٤)/٢ ، (٢+٠)/٢) = (١ ، ١)

نفرض أن د = (س ، ص)

منتصف ب د = (مجموع السينات / ٢ ، مجموع الصادات / ٢)

(١ ، ١) = ((٢ + س)/٢ ، (-٤ + ص)/٢)

المسقط الأول = المسقط الأول	المسقط الثانى = المسقط الثانى
(٢ + س)/٢ = ١	(-٤ + ص)/٢ = ١
٢ + س = ٢	-٤ + ص = ٢
س = ٠	ص = ٦

∴ إحداثى د = (٠ ، ٦)

١ أ ب جـ د متوازى أضلاع تقاطع قطراه في م
حيث أ (٣،-١) ، جـ (١،٧)
أوجد إحداثى نقطة م

الحل

....

٢ إذا كانت النقطة أ (٢،٣) هي منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$
حيث جـ (-١،٣) فأوجد إحداثى نقطة ب

الحل

....

٣ إذا كانت جـ (س ، ـ٣) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث
أ (ـ٣،ص) ، ب (٩،١١) فأوجد قيمة س + ص

الحل

....

٤ إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م حيث أ (٤ ، ـ١) ،
ب (ـ٢ ، ٧) فأوجد إحداثى مركز الدائرة م
وطول نصف قطر الدائرة

الحل

....

أسئلة اختر على درس المنتصف

١) إذا كانت أ (ـ١،٩) ، ب (ـ١،ـ١) فإن إحداثى منتصف أ ب هو ....

(أ) (٤،٠) (ب) (٠،٤) (جـ) (١،٩) (د) (ـ١،٤)

٢) إذا كان أ ب قطر فى دائرة م حيث أ (٣ ، ـ٥) ، ب (٥ ، ١) فإن مركز الدائرة م هو ....

(أ) (ـ٤،ـ٢) (ب) (٤،ـ٢) (جـ) (٢،٢) (د) (٨،ـ٢)

٣) إذا كان أ ب جـ د مربع ، أ (٣،٤) ، جـ (٥،٦) فإن إحداثى نقطة تقاطع قطريه = ...

(أ) (٨،١٠) (ب) (١٠،٨) (جـ) (٤،٥) (د) (١٥،٢٤)

٤) إذا كانت (٣،٢) منتصف أ ب حيث أ (٣،ـ٢) فإن إحداثى ب هو ....

(أ) (٣،٦) (ب) (٠،٠) (جـ) (٠،٦) (د) (١،٥)

٥) إذا كانت جـ (ـ٣،ص) منتصف أ ب حيث أ (س،ـ٦) ، ب (١،ـ٨) فإن س + ص = ...

(أ) ـ١١ (ب) ١١ (جـ) ـ١٨ (د) ـ١٤

٦) إذا كانت (٢،١) تنصف البعد بين النقطتين (٣،ـ٤) ، (س،٦) فإن س = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ـ١ (د) ١

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

تمارين على إحداثى المنتصف

١) أوجد إحداثى نقطة منتصف أ ب حيث

أ (٢ ، ٤) ، ب (٦ ، صفر)

٢) إذا كانت النقطة جـ (٣ ، ١) هي منتصف البعد

بين النقطتين أ (١ ، ص) ، ب (س ، ٣)

فأوجد النقطة (س ، ص)

٣) أ ب جـ د متوازى أضلاع تقاطع قطراه في هـ

حيث أ (٣،ـ١) ، ب (٦،٢) ، جـ (١،٧)

أوجد إحداثى كل من النقطتين هـ ، د

٤) أ ب قطر في الدائرة التي مركزها م فإذا كانت

ب (٨،١١) ، م (٥،٧) فأوجد

١) إحداثى نقطة أ ٢) محيط الدائرة بدلالة π

٥) أ ب جـ د مستطيل فيه:

أ (ـ١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٦ ، ٤) فأوجد:

١) إحداثى نقطة د

٢) مساحة المستطيل أ ب جـ د

٦) اثبت أن النقط أ (٥،٣) ، ب (٣،ـ٢) ، جـ (ـ٢،ـ٤)

هي رؤوس مثلث منفرج الزاوية في ب

ثم أوجد إحداثى نقطة د التي تجعل أ ب جـ د معين

وأوجد مساحة سطحه

٧) أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ (٣،٤) ،

ب (٢،ـ١) ، جـ (ـ٤ ، ـ٣) أوجد إحداثى د

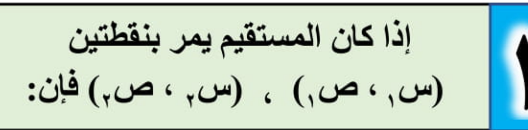
خذ هـ ∈ أ د حيث أ هـ = ٢ أ د

ميل الخط المستقيم

يرمز للميل بالرمز م ويمكن حسابه بالقوانين التالية :

(حسب المعطى في المسألة هتختار القانون المناسب)

١



$$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

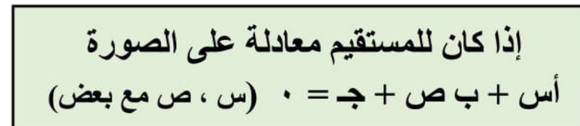
٢

إذا كان المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ

$$م = ظا\ هـ$$

(رسم: هـ ، الاتجاه الموجب لمحور السينات)

٣



$$م = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

٤

إذا كان للمستقيم معادلة على الصورة
ص = أ س + جـ (ص لوحدها)

$$م = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

ملاحظات هامة

١ **تعريف الميل:** هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٢ إذا كان المستقيم يمر بنقطتين ويوازى محور الصادات فإن: **السينات تكون متساوية**

مثال: إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (س ، ٤) ويوازى محور الصادات فإن س = ٣

٣ إذا كان المسستقيم يمر بنقطتين ويوازى محور السينات فإن: **الصادات تكون متساوية**

مثال: إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين (٢ ، -٤) ، (٦ ، ك) ويوازى محور السينات فإن ك = -٤

٤ المستقيم الموازى لمحور السينات ميله = **صفر** ، بينما الموازى لمحور الصادات ميله **غير معرف**

٥ إذا كان المستقيم يصنع زاوية **حادة** مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون الميل **موجب**

إذا كان المستقيم يصنع زاوية **منفرجة** مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون الميل **سالب**

٦ يمكن قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم مع محور السينات بمعلومية الميل: shift ← tan ← الميل

تدريبات على حساب الميل

١ أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢،-١) ، (٦،٣)

الحل

الميل م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٣ - -١}{٦ - ٢}$ = $\frac{٤}{٤}$ = ١

٢ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لحور السينات زاوية قياسها ٣٠°

الحل

الميل م = ظا هـ = ظا ٣٠ =

٣ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

٤س – ٧ص – ١ = ٠

الحل

الميل م = $\frac{\text{ـ معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٤}{-٧}$ = $\frac{٤}{٧}$

٤ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

٢ص = ٦س + ١

الحل

الميل م = $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

٥ أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (-٤ ، ١) ، (٣ ، ٥)

الحل

٦ أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

الحل

٧ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

٥ص + ٢س = ٣

الحل

٨ أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

٣ص = س – ٢

الحل

٩ إذا كانت ب (-٥ ، ٣) ، جـ (-١ ، ٧) فأوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

ميل ب جـ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٧ - ٣}{-١ - -٥}$ = ١

∵ م = ظا هـ ∴ ظا هـ = ١ ∴ ق ($\hat{\text{هـ}}$) = ٤٥°

متفوقين أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته

$\frac{\text{ص}}{٢}$ + $\frac{\text{س}}{٣}$ = ٥ (بطريقتين)

الحل

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

إذا كان المستقيمان متوازيان فإن:

ميل الأول = ميل الثانى

$م_1 = م_2$

لإثبات أن المستقيمان متوازيان :

نحسب: $م_1$ ، $م_2$ ونثبت أن: $م_1 = م_2$

لو عندك مستقيمين متوازيين وعايز قيمة مجهول:

نحسب: $م_1$ ، $م_2$

ثم نساوى : الميل المجهول = الميل المعلوم

إذا كان ميل مستقيم = $\frac{3}{4}$ فإن ميل الموازى له = $\frac{3}{4}$

إذا كان ميل مستقيم = ـ٢ فإن ميل الموازى له = ...

مثال ١ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢،ـ١) ، (٦،٣) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

الحل

$م_1 = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{3 - -1}{6 - 2} = \frac{4}{4} = 1$

$م_2 =$ ظا ٤٥ = ١

$\because م_1 = م_2$ $\therefore$ المستقيمان متوازيان

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

إذا كان المستقيمان متعامدان فإن:

$م_1 \times م_2 = -1$ أو $م_1 = \frac{-1}{م_2}$

لإثبات أن المستقيمان متعامدان :

نثبت أن: $م_1 \times م_2 = -1$

أو ميل = صفر والميل الآخر غير معرف

لو عندك مستقيمين متعامدين وعايز قيمة مجهول:

نحسب: $م_1$ ، $م_2$

ثم نساوى : الميل المجهول = ـ شقلوب المعلوم

إذا كان ميل مستقيم = $\frac{3}{4}$ فإن ميل العمودى عليه = $\frac{-4}{3}$

إذا كان ميل مستقيم = ـ١ فإن ميل العمودى عليه = ...

مثال ٢ اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (ـ٣،٤) ، (ـ٣،ـ٢) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (١،٢) ، (ـ٣،٢)

الحل

$م_1 = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{-2 - 4}{-3 - -3} = \frac{-6}{0}$ غير معرف

$م_2 = \frac{2 - 2}{-3 - 1} = \frac{0}{-4} =$ صفر

$\therefore$ المستقيمان متعامدان

إعداد أ/ محمود عوض حسن

مثال ١
اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٣،٢) ، (٠،٠) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (-١،٤) ، (١،٧)

الحل

$$م_١ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٠}{٢ - ٠} = \frac{٣}{٢}$$

$$م_٢ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٧ - ٤}{١ - -١} = \frac{٣}{٢}$$

∵ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

مثال ٢
أوجد ميل المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، -٢) ، (٥ ، ١)

الحل

$$م_٢ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{١ - -٢}{٥ - ٢} = \frac{٣}{٣} = ١$$

∵ المستقيمان متعامدان

∴ $م_١ = \frac{-١}{م_٢} = -١$

مثال ٣
اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، -١) ، (٢ ، ٤) يوازى المستقيم ٣ص – س – ١ = ٠

الحل

$$م_١ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٤ - ٣}{٢ - -١} = \frac{١}{٣}$$

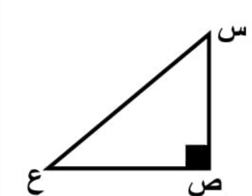
$$م_٢ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{١}{٣}$$

∵ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

مثال ٤
إذا كان المثلث الذى رؤوسه النقط ص (٤،٢) ، س (٣،٥) ، ع (-٥،أ) قائم الزاوية فى ص فأوجد قيمة أ

الحل

∵ Δ قائم فى ص ∴ $\overline{\text{س ص}} \perp \overline{\text{ص ع}}$



$$\text{ميل س ص} = \frac{٢ - ٥}{٤ - ٣} = -٣$$

$$\text{ميل ص ع} = \frac{أ - ٢}{-٥ - ٤} = \frac{أ - ٢}{-٩}$$

∵ $\overline{\text{س ص}} \perp \overline{\text{ص ع}}$ ∴ $م_١ \times م_٢ = -١$

$$\frac{أ - ٢}{-٩} = \frac{١}{٣}$$ أ - ٢ = -٣ ∴ أ = -١

مثال ٥
إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣،١) ، (٢، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان $ل_١ // ل_٢$

الحل

$$م_١ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ك - ١}{٢ - ٣} = \frac{ك - ١}{-١}$$

$م_٢$ = ظا هـ = ظا ٤٥ = ١

∵ المستقيمان متوازيان ∴ $م_١ = م_٢$

$$\frac{ك - ١}{-١} = ١$$ (مقص) ك – ١ = -١

ك = -١ + ١ ∴ ك = صفر

مثال ٦
إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣،١) ، (٢، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان $ل_١ \perp ل_٢$

الحل

$$م_١ = \frac{ك - ١}{٢ - ٣} = \frac{ك - ١}{-١}$$ $م_٢$ = ظا ٤٥ = ١

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $م_١ = \frac{-١}{م_٢}$

المجهول = – شقلوب المعلوم

$$\frac{ك - ١}{-١} = -١$$ ك – ١ = ١

ك = ١ + ١ ∴ ك = ٢

تدريبات

١

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين

(-٤، ١) ، (٣ ، ٥) يوازى المستقيم الذى معادلته

٤س – ٧ص – ٩ = ٠

الحل

....

٢

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين

(٤ ، ٣ $\sqrt{٣}$) ، (٥، ٢ $\sqrt{٣}$) عمودي على المستقيم

الذى يصنع زاوية قياسها ٣٠°

الحل

....

٣

إذا كان المستقيمان $ل_١$: ٣س – ٤ص – ٣ = ٠

، $ل_٢$: أ ص + ٤س – ٨ = ٠ متعامدين

فأوجد قيمة أ

الحل

....

٤

إذا كان المستقيم الذى معادلته ٣ص = ٢س + ٦

يوازى المستقيم الذى معادلته ٦س + ك ص – ٣ = ٠

فأوجد قيمة ك

الحل

....

إثباتات هامة باستخدام الميل

إثبات أن: النقط تقع على استقامة واحدة

نحسب أي ميلين ونثبت أنهما متساويان

مثل: ميل أ ب = ميل ب جـ

إثبات أن: Δ أ ب جـ قائم في ب

نحسب: ميل أ ب ، ب جـ (المتعامدان)

نثبت أن : ميل أ ب × ميل ب جـ = -١



إثبات أن: الشكل أ ب جـ د شبه منحرف

نثبت أن : ضلعان متوازيان وضلعان غير متوازيان

أى أن : ميل ب جـ = ميل أ د ، ميل أ ب ≠ ميل جـ د

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

إثبات أن: الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع

نثبت أن: كل ضلعان متقابلان متوازيان

أى أن : ميل أ ب = ميل جـ د ∴ أ ب // جـ د

ميل ب جـ = ميل أ د ∴ ب جـ // أ د

إثبات أن: الشكل أ ب جـ د معين

١- نثبت أنه متوازى أضلاع

٢- القطران متعامدان : ميل أ جـ × ميل ب د = -١

إثبات أن: الشكل مستطيل

١- نثبت أنه متوازى أضلاع

٢- ضلعان متجاوران متعامدان كالتالى:

ميل أ ب × ميل ب جـ = -١

إثبات أن: الشكل مربع

١- نثبت أنه متوازى أضلاع

٢- ضلعان متجاوران متعامدان

٣- القطران متعامدان

مثال ١

اثبت أن النقط أ (-٣،-١) ، ب (٦،٥) ، جـ (٣،٣)
تقع على استقامة واحدة

الحل

ميل أ ب = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٥ - -١}{٦ - -٣} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

ميل ب جـ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٥}{٣ - ٦} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

∵ ميل أ ب = ميل ب جـ

∴ النقط تقع على استقامة واحدة

مثال ٢

إذا كانت النقط (٠،١) ، (أ ،٣) ، (٢،٥) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة أ

الحل

نحسب الميل من النقطة (٠ ،١) والنقطة (أ ، ٣)

$م_١ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ١}{أ - ٠} = \frac{٢}{أ}$

نحسب الميل من النقطة (٠ ،١) والنقطة (٢ ، ٥)

$م_٢ = \frac{٥ - ١}{٢ - ٠} = \frac{٤}{٢} = ٢$

∵ النقط تقع على استقامة واحدة ∴ $م_١ = م_٢$

∴ $\frac{٢}{أ} = ٢$ ∴ ٢ أ = ٢ ∴ أ = ١

مثال ٣

اثبت باستخدام الميل أن النقط أ (-١ ،٣) ، ب (٥ ،١) ، جـ (٦ ،٤) ، د (٠ ،٦)
هي رؤوس مستطيل

الحل

ميل أ ب = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{١ - ٣}{٥ - -١} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣}$

ميل ب جـ = $\frac{٤ - ١}{٦ - ٥} = ٣$

ميل جـ د = $\frac{٦ - ٤}{٠ - ٦} = \frac{٢}{-٦} = \frac{-١}{٣}$

ميل أ د = $\frac{٦ - ٣}{٠ - -١} = ٣$

∵ ميل أ ب = ميل جـ د ∴ أ ب // جـ د

∵ ميل ب جـ = ميل أ د ∴ ب جـ // أ د

∴ الشكل متوازى أضلاع

لإثبات أنه مستطيل نثبت أن ضلعان متجاوران متعامدان

∵ ميل أ ب × ميل ب جـ = $\frac{-١}{٣} \times ٣ = -١$

∴ أ ب ⊥ ب جـ ∴ الشكل مستطيل

مثال ٣

اثبت باستخدام الميل أن النقط أ (٥ ،٣) ، ب (٦ ،-٢) ، جـ (١ ، -١) ، د (٠ ،٤)
هي رؤوس معين

الحل

ميل أ ب = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{-٢ - ٣}{٦ - ٥} = -٥$

ميل ب جـ = $\frac{-١ - -٢}{١ - ٦} = \frac{-١}{٥}$

ميل جـ د = $\frac{٤ - -١}{٠ - ١} = \frac{٥}{-١} = -٥$

ميل أ د = $\frac{٣ - ٤}{٥ - ٠} = \frac{-١}{٥}$

∵ ميل أ ب = ميل جـ د ∴ أ ب // جـ د

∵ ميل ب جـ = ميل أ د ∴ ب جـ // أ د

∴ الشكل متوازى أضلاع

لإثبات أنه معين نثبت أن القطران متعامدان

ميل أ جـ = $\frac{٣ - -١}{٥ - ١} = \frac{٤}{٤} = ١$

ميل ب د = $\frac{-٢ - ٤}{٦ - ٠} = \frac{-٦}{٦} = -١$

∵ ميل أ جـ × ميل ب د = ١ × -١ = -١

∴ القطران متعامدان ∴ الشكل معين

١ اثبت أن النقط أ (١،٥) ، ب (٣، ـ٧) ، جـ (١،٣) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

الحل

....

٢ أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (ـ١،١) ، ب (٠،٥) ، جـ (٥،٦) ، د (٤،٢) فاثبت أن الشكل أ ب جـ د متوازى أضلاع

الحل

....

٣ اثبت أن النقاط أ (٢،٣) ، ب (٦،٢) ، جـ (٠،ـ١) ، د (ـ٢،١) تكون رؤوس شبه المنحرف

الحل

....

٤ اثبت باستخدام الميل أن النقط أ (٦،٠) ، ب (٢،ـ٤) ، جـ (ـ٤،٢) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب

الحل

....

أسئلة اختر على درس الميل

(١) ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ...

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) غير معرف

(٢) ميل المستقيم الذى معادلته ٣ س – ٤ ص + ١٢ = ٠ هو ....

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣) المستقيم الذى معادلته ٣ص = ٢س + ٦ ميله = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٤) إذا كان أ ب // جـ د وكان ميل أ ب = ٠,٧٥ فإن ميل جـ د = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٥٧

(٥) إذا كان أ ب ⊥ جـ د ، وكان ميل أ ب = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل جـ د = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٩}$

(٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ،فيه أ (-٣،٤) ، ب (-١،-٢) فإن ميل ب جـ = ...

(أ) -٣ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

(٧) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (١،ص) ، (٣،٤) ميله يساوى ظا ٤٥ فإن ص = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) -١ (د) ٢

(٨) إذا كان ميل المستقيم أ س – ص + ٥ = ٠ يساوى ٣ فإن قيمة أ = ...

(أ) ٥ (ب) -٥ (جـ) ١ (د) ٣

(٩) إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٦}{ك}$ متوازيان فإن ك = ...

(أ) ٦ (ب) -٤ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

(١٠) إذا كان المستقيمان س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ٠ متعامدين فإن ك = ...

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٢

(١١) إذا كان جـ د يوازى محور الصادات حيث جـ (ك ، ٤) ، د (-٥ ، ٧) فإن ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) -٥ (د) ٤

(١٢) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين أ (٨ ، ٣) ، د (٢ ، ك) يوازى محور السينات فإن ك = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٣) إذا كان المستقيم ل س – ٥ ص + ٧ = صفر يوازى محور السينات فإن ل = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٥ (د) ٧

تمارين على ميل الخط المستقيم

(١) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٠،٥) ، (٣،٢) عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

---

(٢) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (ـ٣،ـ٢) ، (٤،٥) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

---

(٣) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (١،٣) ، (٢،٤) يوازى المستقيم الذى معادلته ص ـ س = ٥

---

(٤) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مع الاتجاه السالب لمحور السينات حيث أ (٣ ، ـ٢) ، ب (٦ ، ١)

---

(٥) إذا كان المستقيم الذى معادلته أ س + ٢ص ـ ٧ = ٠ يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد قيمة أ

---

(٦) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (ـ٢ ، ٣) ، (١ ، ك) عموديا على مستقيم ميله ـ ٣ فأوجد قيمة ك

---

(٧) إذا كانت معادلتى المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ هما على الترتيب:

٢س ـ ٣ص + ١ = ٠ ، ٣س + ب ص ـ ٦ = ٠

فأوجد قيمة ب التي تجعل:

١) $ل_١ \parallel ل_٢$ ٢) $ل_١ \perp ل_٢$

(٨) اثبت أن النقط أ (٤،٣) ، ب (١،١) ، جـ (ـ٥،ـ٣) تقع على استقامة واحدة

---

(٩) اثبت أ ن النقط أ (ـ٢،٥) ، ب (٢،٣) ، جـ (ـ٤،٢) ليست على استقامة واحدة

---

(١٠) اثبت أن الشكل الرباعى أ ب جـ د الذى رؤوسه أ (ـ١،٣) ، ب (٥،١) ، جـ (٧،٤) ، د (١،٦) متوازى أضلاع

---

(١١) أ ب جـ د شكل رباعى حيث : أ (٣،٢) ، ب (٤،ـ٣) ، جـ (ـ١،ـ٢) ، د (ـ٢،٣) اثبت باستخدام الميل أن الشكل أ ب جـ د معين

---

(١٢) اثبت باستخدام الميل أن المثلث الذى رؤوسه أ (١،٤) ، ب (ـ١،ـ٢) ، جـ (٢،ـ٣) قائم الزاوية في ب

---

(١٣) إذا كانت أ (١ ، ٠) ، ب (ـ١ ، ٤) ، جـ (٧،٨) ، د (٩،٤) فاثبت أن الشكل أ ب جـ د مستطيل

---

(١٤) أ ب جـ د شكل رباعى حيث : أ (٢،٤) ، ب (ـ٣،٤) ، جـ (ـ٣،ـ١) ، د (٢،ـ١) اثبت باستخدام الميل أن الشكل أ ب جـ د مربع

معادلة الخط المستقيم

يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية: (١) الميل (٢) طول الجزء المقطوع من محور الصادات

وتكون المعادلة على الصورة: **ص = م س + جـ**

مثال١ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله ٣ ويقطع من محور الصادات جزءا **موجبا** طوله ٥ وحدات

الحل

ص = م س + جـ

م = ٣ ، جـ = ٥

المعادلة هي: ص = ٣ س + ٥

مثال٢ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $\frac{-١}{٣}$ ويقطع من محور الصادات جزءا **سالبا** طوله ٣ وحدات

الحل

ص = م س + جـ

م = $\frac{-١}{٣}$ ، جـ = ــ ٣

المعادلة هي: ص = $\frac{-١}{٣}$ س ــ ٣

ملحوظة عند حساب قيمة جـ

لحساب الجزء المقطوع لازم يكون معاك: (١) ميل المستقيم المطلوب معادلته

(٢) زوج مرتب يمر به المستقيم المطلوب معادلته (خد منه قيمة س ، ص)

مثال١ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $\frac{١}{٥}$ ويمر النقطة (٥ ، ٣)

الحل

ص = م س + جـ ، م = $\frac{١}{٥}$

من الزوج (٥،٣) نعوض عن س = ٥ ، ص = ٣

٣ = ٥ × $\frac{١}{٥}$ + جـ

٣ = ١ + جـ ← جـ = ٢

المعادلة هي: ص = $\frac{١}{٥}$ س + ٢

مثال٢ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (١ ، ٦)

الحل

ص = م س + جـ

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٦ - ٣}{١ - ٢}$ = $\frac{٣}{-١}$ = -٣

من الزوج (٢،٣) نأخذ س = ٢ ، ص = ٣

٣ = -٣ × ٢ + جـ

٣ = -٦ + جـ ← جـ = ٩

المعادلة هي: ص = -٣ س + ٩

مثال ٣

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١،٣) ،(-١،-٣)
ثم اثبت أنه يمر بنقطة الأصل

الحل

ص = م س + جـ

م = $\frac{-٣ - ٣}{-١ - ١}$ = $\frac{-٦}{-٢}$ = ٣

من (١،٣) بالتعويض عن : س = ١ ، ص = ٣ ، م= ٣

٣ = ٣ × ١ + جـ   ٣ = ٣ + جـ

جـ = ٠

∴ المعادلة هى : ص = ٣س

لإثبات أنه يمر بنقطة الأصل نعوض عن س = ٠

∴ ص = ٣×٠ = ٠   ∴ يمر بنقطة الأصل

مثال ٤

أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٢
ويمر بالنقطة (١ ، ٠)

الحل

ص = م س + جـ

من الزوج المرتب (١،٠)

نعوض عن س = ١ ، ص = ٠

٠ = ٢ × ١ + جـ

٠ = ٢ + جـ

∴ جـ = -٢

∴ المعادلة هى: ص = ٢س – ٢

مثال ٥

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة
(٣،-٥) ويوازى المستقيم س + ٢ص – ٧ = ٠

الحل

ص = م س + جـ

م٢ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-١}{٢}$

المستقيمان متوازيان   م١ = $\frac{-١}{٢}$

بالتعويض عن س= ٣ ، ص = -٥ ، م = $\frac{-١}{٢}$

-٥ = $\frac{-١}{٢}$ × ٣ + جـ   -٥= $\frac{-٣}{٢}$ + جـ

جـ = -٥+ $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{-٧}{٢}$

∴ المعادلة هى: ص = $\frac{-١}{٢}$ س + $\frac{-٧}{٢}$

مثال ٦

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣،٤)
وعمودى على المستقيم ٥س – ٢ص + ٧ = ٠

الحل

ص = م س + جـ

م٢ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٥}{-٢}$ = $\frac{٥}{٢}$

∵ المستقيمان متعامدان   ∴ م١ = – $\frac{٢}{٥}$

بالتعويض عن س= ٣ ، ص = ٤ ، م = – $\frac{٢}{٥}$

٤ = – $\frac{٢}{٥}$ × ٣ + جـ   ٤= – $\frac{٦}{٥}$ + جـ

جـ = ٤ + $\frac{٦}{٥}$ = $\frac{٢٦}{٥}$

∴ المعادلة هى: ص = – $\frac{٢}{٥}$ س + $\frac{٢٦}{٥}$

مثال ٧ مستقيم ميله $\frac{١}{٢}$ ويقطع من محور الصادات جزءا طوله وحدتان أوجد :

١) معادلة المستقيم ٢) نقطة تقاطعه مع محور السينات

الحل

ص = م س + جـ

م = $\frac{١}{٢}$ ، جـ = ٢

∴ المعادلة هي: ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات

نعوض في المعادلة عن ص = ٠

٠ = $\frac{١}{٢}$ س + ٢

$\frac{١}{٢}$ س = ـ ٢

س = ـ٢×٢ = ـ٤

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات هي (ـ٤،٠)

مثال ٨ أوجد معادلة المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ١٣٥ ويقطع جزءا موجبا من محور الصادات طوله ٥ وحدات

الحل

ص = م س + جـ

م = ظا هـ

= ظا ١٣٥ = ـ١

حسبناها باستخدام الآلة الحاسبة

جـ = ٥

معادلة المستقيم هي:

ص = ـ س + ٥

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

مثال ٩ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١،٢) وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، ـ٣) ، ب (٥ ، ـ٤)

الحل

ميل أ ب = $\frac{-٤ - -٣}{٥ - ٢}$ = $\frac{-١}{٣}$

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $م_١$ = ٣

∵ المستقيم يمر بالنقطة (١،٢)

بالتعويض عن س= ١ ، ص = ٢ ، م = ٣

ص = م س + جـ

٢ = ٣ × ١ + جـ

جـ = ٢ ـ ٣ = -١

∴ المعادلة هى: ص = ٣س ـ ١

مثال ١٠ أوجد معادلة المستقيم العمودى على $\overline{أب}$ من نقطة منتصفها حيث أ(١،٣) ، ب (٣،٥)

الحل

$م_٢$ = $\frac{٥ - ٣}{٣ - ١}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $م_١$ = -١

منتصف أ ب = ($\frac{١ + ٣}{٢}$ ، $\frac{٣ + ٥}{٢}$) = (٢،٤)

∵المستقيم يمر بالنقطة (٢،٤) نأخذ س=٢ ، ص=٤

ص= م س + جـ

٤ = -١ × ٢ + جـ ٤= -٢+ جـ

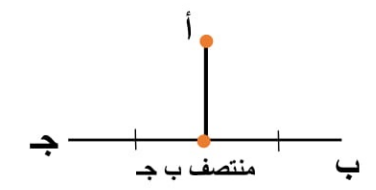
جـ = ٦

∴ المعادلة هى: ص = - س + ٦

مثال ١١

إذا كانت أ (-٣،٤) ، ب (٥،-١) ، جـ (٣،٥) فأوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ وينصف $\overline{\text{ب جـ}}$

الحل



منتصف ب جـ = $\left(\frac{٥ + ٣}{٢} ، \frac{-١ + ٥}{٢} \right)$ = (٤،٢)

∵ المستقيم يمر بالنقطة أ (-٣،٤)
وبمنتصف ب جـ (٤،٢)

∴ م = $\frac{٢ - ٤}{٤ - -٣} = \frac{-٢}{٧}$

∵ المستقيم يمر بالنقطة (٤،٢)
∴ نعوض عن س = ٤ ، ص = ٢

٢ = $\frac{-٢}{٧}$ × ٤ + جـ ، ٢ = $\frac{-٨}{٧}$ + جـ

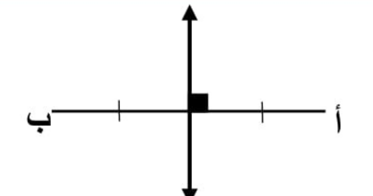
جـ = ٢ + $\frac{٨}{٧}$ ∴ جـ = $\frac{٢٢}{٧}$

∴ المعادلة هى : ص = $\frac{-٢}{٧}$ س + $\frac{٢٢}{٧}$

مثال ١٢

إذا كانت أ (-٢،٣) ، ب (٠،٥)
فأوجد معادلة محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$

الحل



محور تماثل القطعة المستقيمة
هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها

ميل أ ب = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٥ - ٣}{٠ - -٢} = \frac{٢}{٢}$ = ١

∵ محور التماثل ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ميل محور التماثل = -١

لحساب قيمة جـ :

∵ محور التماثل يمر بنقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

منتصف أ ب = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$

= $\left(\frac{-٢ + ٠}{٢} ، \frac{٣ + ٥}{٢} \right)$ = (-١ ، ٤)

∴ محور التماثل يمر بالنقطة (-١ ، ٤)

بالتعويض في المعادلة ص = م س + جـ
٤ = -١ × -١ + جـ
٤ = ١ + جـ جـ = ٣

معادلة محور التماثل هي : ص = – س + ٣

مثال ١٣

أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طوليهما ٤ ، ٩

الحل

ص = م س + جـ

∵ المستقيم يمر بالنقطتين (٤،٠) ، (٠،٩)

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٩ - ٠}{٠ - ٤} = \frac{٩}{-٤} = -\frac{٩}{٤}$

∵ جـ = ٩

∴ المعادلة هى: ص= $-\frac{٩}{٤}$ س +٩

مثال ١٤

أوجد معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ميل المستقيم $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$ ويقطع جزءا سالبا من محور الصادات مقداره ٣ وحدات

الحل

نظبط شكل المعادلة $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$ (مقص)

٣ص ـ ٣ = س ← ٣ص ـ س ـ٣ = ٠

م = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{١}{٣}$ ، جـ = ـ ٣

∴ المعادلة هي : ص = $\frac{١}{٣}$ س ـ ٣

مثال ١٥ — في الشكل المقابل :

النقطة جـ (٣ ، ٤) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

أوجد :

١) إحداثي كل من أ ، ب

٢) معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

الحل

∵ أ تقع على محور السينات ∴ أ = (س ، ٠)

∵ ب تقع على محور الصادات ∴ ب = (٠ ، ص)

منتصف أ ب = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢}\right)$

(٣ ، ٤) = $\left(\frac{\text{س} + ٠}{٢} ، \frac{\text{ص} + ٠}{٢}\right)$

$\frac{\text{س}}{٢} = ٣$ | $\frac{\text{ص}}{٢} = ٤$

س = ٦ | ص = ٨

∴ أ = (٦ ، ٠) | ∴ ب = (٠ ، ٨)

معادلة أ ب : ص = م س + جـ

ميل أ ب = $\frac{٨ - ٠}{٠ - ٦} = \frac{٨}{-٦} = -\frac{٤}{٣}$ ، جـ = ٨

∴ معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هي ص = $-\frac{٤}{٣}$ س + ٨

مثال ١٦ — في الشكل المقابل :

ق (أ و̂ ب) = ٦٠°

حيث و نقط الأصل

أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$

الحل

∵ ق (أ و̂ ب) = ٦٠°

وهى الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحورالسينات

∴ الميل م = ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ يمر بنقطة الأصل و ∴ جـ = صفر

ص = م س + جـ ∴ المعادلة: ص = $\sqrt{٣}$ س

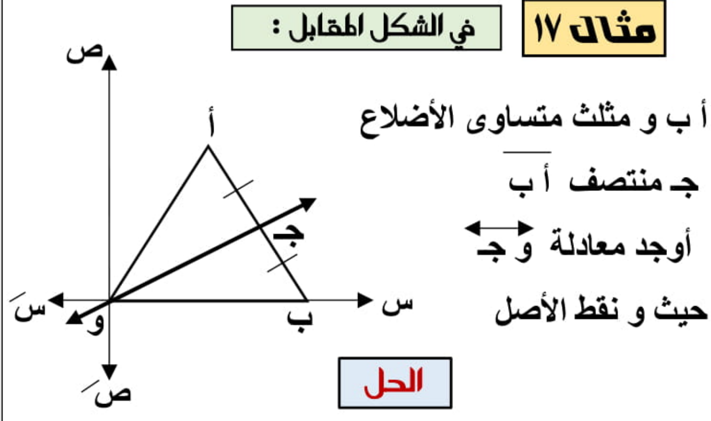
مثال ١٧ — في الشكل المقابل :

أ ب و مثلث متساوى الأضلاع

جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{و جـ}}$

حيث و نقط الأصل



الحل

∵ أ و ب Δ متساوى الأضلاع

∴ ق (أ و̂ ب) = ٦٠°

∵ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ (أي أن $\overrightarrow{\text{و جـ}}$ متوسط في المثلث)

∴ $\overrightarrow{\text{و جـ}}$ ينصف أ و̂ ب

∴ ق (جـ و̂ ب) = ٣٠°

وهى الزاوية التي يصنعها $\overleftrightarrow{\text{و جـ}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

∴ الميل = ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$ يمر بنقطة الأصل و ∴ جـ = صفر

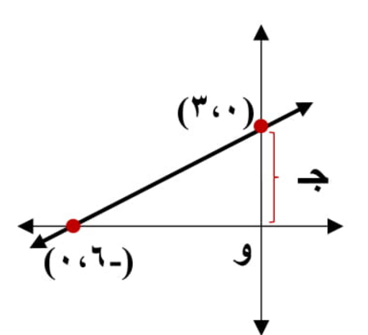
∵ ص = م س + جـ

∴ المعادلة هى ص = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ س

مثال ١٨ — في الشكل المقابل :

باستخدام الشكل المقابل

أكمل ما يأتي:



١) طول الجزء المقطوع من محور الصادات = ...

٢) طول الجزء المقطوع من محور السينات = ...

٣) ميل الخط المستقيم م = ...

٤) معادلة الخط المستقيم هي ....

حساب طول الجزء المقطوع من محور الصادات

إذا كانت المعادلة على الصورة

أ س + ب ص + جـ = ٠ فإن:

$$\text{الجزء المقطوع من محور الصادات} = \frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$$

إذا كانت المعادلة على الصورة

ص = أ س + جـ فإن:

$$\text{الجزء المقطوع من محور الصادات} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$$

ولكن في الحالتين يكون **طول** الجزء المقطوع من محور الصادات = $\left|\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}\right|$

مثال ١ أوجد الميل و الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم ٢ص= ٣س + ١٢

الحل

نظبط المعادلة فتكون:

٢ص – ٣س – ١٢ = ٠

$$\text{الميل م} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{٣}{٢}$$

$$\text{الجزء المقطوع من محور الصادات} = \frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$$

$$= \frac{١٢}{٢} = ٦$$

مثال ٢ أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

الحل

لاحظ أن : معامل س = $\frac{١}{٢}$ ، معامل ص = $\frac{١}{٣}$

$$\text{الميل م} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = -\frac{١}{٢} \div \frac{١}{٣}$$

$$= -\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{١} = \frac{-٣}{٢}$$

$$\text{طول الجزء المقطوع من محور الصادات} = \left|\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}\right|$$

$$= ١ \div \frac{١}{٣} = ٣$$

ملاحظات على معادلة الخط المستقيم

١) معادلة المستقيم الموازى لمحور السينات ويمر بالنقطة (أ ، ب) هي : ص = ب

مثال: المستقيم الموازى لمحور السينات ويمر بالنقطة (٢، ٥) معادلته هي : ص = ٥

٢) معادلة المستقيم الموازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة (أ ، ب) هي : س = أ

مثال: المستقيم الموازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة (٣، ٤) معادلته هي : س = ٣

٣) إذا كان المستقيم يمر بنقطة الأصل فإن الجزء المقطوع من محور الصادات جـ = صفر

معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ٣ ويمر بنقطة الأصل هى : ص = ٣س

معادلة المستقيم الذى ميله يساوى واحد ويمر بنقطة الأصل هى : ص = س

٤) معادلة محور السينات هي ص = صفر ، معادلة محور الصادات هي س = صفر

١ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) ويوازى المستقيم الذى معادلته ص = ٣س + ٥

الحل

....

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٢) ، (١ ، ـ١)

الحل

....

٣ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣،ـ٥) عموديا على المستقيم س + ٢ص ــ ٧ = ٠

الحل

....

٤ أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذى معادلته ٤س + ٥ص ــ ١٠ = ٠

الحل

....

أسئلة اختر على معادلة المستقيم

١ الخط المستقيم الذى معادلته ٣ص = ٢ س + ٦ يقطع جزءا من محور الصادات طوله = ... وحدة طول

(أ) ٦ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) -٣

٢ المستقيم الذى معادلته ٢ س – ٣ ص – ٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءا طوله .... وحدة طول

(أ) -٦ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) $\frac{٢}{٣}$

٣ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣،-٥) ويوازى محور الصادات هى ....

(أ) س = ٣ (ب) ص = -٥ (جـ) ص = ٢ (د) س = -٥

٤ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣،-٥) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س = ٣ (ب) ص = -٥ (جـ) ص = ٢ (د) س = -٥

٥ معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ٣ ويمر بنقطة الأصل هي ....

(أ) س =٣ (ب) ص =٣ (جـ) ص =٣س (د) ص = -٣س

٦ معادلة المستقيم الذى ميله يساوى واحد ويمر بنقطة الأصل هي ....

(أ) س = ١ (ب) ص = ١ (جـ) ص = ٠ (د) ص = س

٧ الخط المستقيم ص – ٢ س – ٥ = ٠ يقطع من المحور الصادى جزءا طوله .... وحدة طول

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٠

٨ المستقيم الذى معادلته س + ٢ص – ٧ = ٠ يقطع من محور السينات جزءا طوله .... وحدة طول

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٧ (د) ٣

٩ مساحة المثلث المحدد بالمستقيمات ٣س – ٤ص = ١٢ ، س = ٠ ، ص = ٠ تساوى .... وحدة طول مربعة

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٥ (د) ١٢

١٠ في الشكل المقابل:

إذا كان أ و = ٨ وحدات طول ، ب و = ٦ وحدات طول

فإن معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي ....

(أ) ص = $\frac{٤}{٣}$ س + ٨ (ب) ص = $-\frac{٤}{٣}$ س – ٨

(جـ) ص = $\frac{٣}{٤}$ س – ٨ (د) ص = $-\frac{٤}{٣}$ س + ٨

تمارين على معادلة الخط المستقيم

١) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = ٢ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات جزءا طوله ٧ وحدات

---

٢) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله يساوى ٣ ويمر بالنقطة (٥ ، ٠)

---

٣) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢)

---

٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٢) ، (ـ٢ ، ـ١) ثم اثبت أنه يمر بنقطة الأصل

---

٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣،٥) عموديا على المستقيم الذى ميله $\frac{-١}{٢}$

---

٦) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) ويوازى المستقيم ٢س ـ ٣ص + ٦ = ٠

---

٧) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٢، ـ٥) عموديا على المستقيم الذى معادلته ص ـ ٢س +٧ = ٠

---

٨) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢،ـ٥) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (ـ٢،١) ، (٢،٧)

---

٩) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع جزءا موجبا من محور الصادات طوله ٣ وحدات ويوازى المستقيم ٢س ـ ٣ص = ٦

١٠) إذا كانت أ (٣ ، ـ١) ، ب (٥ ، ٣) فأوجد معادلة محور تماثل $\overline{أب}$

---

١١) أوجد معادلة المستقيم العمودى على $\overline{أ ب}$ من نقطة منتصفها حيث أ (٢،١) ، ب (٤،٥)

---

١٢) إذا كانت أ (٥،ـ٦) ، ب (٣،٧) ، جـ (١،ـ٣) فأوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة أ وبمنتصف $\overline{ب جـ}$

---

١٣) أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذى معادلته: ٢س = ٣ص + ٦

---

١٤) أوجد ميل الخط المستقيم الذى معادلته: ٢س ـ ٦ص = ١٢ ثم أوجد نقطتى تقاطعه مع محورى الإحداثيات

---

١٥) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طوليهما ١ ، ٤ وحدات طول على الترتيب

---

١٦) في الشكل المقابل:

جـ (١،٢) منتصف أ ب

فأوجد:

١) إحداثى أ ، ب
٢) معادلة $\overleftrightarrow{أ ب}$
٣) مساحة المثلث و أ ب

١) عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) صفر

٢) المثلث أ ب جـ فيه أ ب > أ جـ فإن ق $(\hat{ب})$ .... ق $(\hat{جـ})$

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ≤

٣) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٤٥

٤) محيط الدائرة = ...

(أ) π نق (ب) π $نق^2$ (جـ) ٢ π نق (د) ٤ π نق

٥) Δ أ ب جـ المتساوى الساقين إذا كان إحدى زوايا القاعدة = ٣٠° فإن قياس زاوية الرأس = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٧٥ (د) ٣٠

٦) أ ب جـ د متوازى أضلاع ن فإذا كان ق $(\hat{أ})$ = ٤٠° فإن ق $(\hat{ب})$ = ...

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٤٠

٧) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة .... من جهة الرأس

(أ) ١ : ١ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ١ : ٢ (د) ٢ : ١

٨) إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٢ سم ، ٥ سم فإن طول الضلع الثالث = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

٩) مساحة المربع الذى محيطه ١٦ سم = ... $سم^2$

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٢٥٦

١٠) مجموع طولى أي ضلعين في مثلث .... طول الضلع الثالث.

(أ) أصغر من (ب) يساوى (جـ) أكبر من (د) ضعف

١١) في الشكل المقابل :

س سم | ع سم | ٦٠ | ص

(أ) س +ص =ع (ب) ع = $س^2$ + $ص^2$ (جـ) ٢س = ع (د) ص = ٢ ع

١٢) أسطوانة دائرية قائمة إذا كان ارتفاعها = طول نصف قطر قاعدتها نق فإن حجمها = ... $سم^3$

(أ) π $نق^3$ (ب) ٢ π $نق^2$ (جـ) ٢ π $نق^3$ (د) $\frac{٤}{٣}$ π $نق^3$